参考

関係計算の方法

これは，山本恒夫「関係計算の方法」（筑波大学生涯学習学研究室，1997年３月）の前書きを削除し，本文の誤植の修正を行って再録したものである。

Ⅰ　共立関係計算体系

共立関係計算体系は，複合関係が同時に成り立つ関係を扱う計算法の体系である。

1　記　号

はじめに，関係計算に用いる記号を定めておくことにしよう。関係計算に用いる記号は次のとおりである。

① 式：A，B，C…
② 定項：a，b，c…
③ 変項：x，y，z
④ 関係記号：♯，工，ↀ，≺
　縛り関係記号：工*，工^{t}，工^{s}，ↀ^{1}，ↀ^{2}，ↀ$^{+}$，ↀ$^{-}$
⑤ 関係変化記号：C
⑥ 項間変化記号：P
⑦ 導出記号：→
⑧ 関係同値：≡
⑨ 複合関係の共立関係記号：・

以上のほかにも，必要に応じ他の記号も導入できるものとしておく。上記の記号で→は“ならば”と読むことにし，≡は“関係同値”と読むことにしておきたい。→は前件が後件を含意していることによる導出を意味し，≡は左辺と右辺の関係が同じであることを表している。

2　関係記号の説明

(1)　♯

♯は組合せ関係を表す記号で，“組合せ”または“組み”と読むことにしておこう。われわれの直視や思考の対象で，一定の範囲にあるものを一つの全体とみなすとき，それを集合といい，その範囲内の個々の対象をその集合の要素（element）というが，♯は，

集合C｛a，b……｝

におけるa，b……の関係を表している。これは，ある範囲内にともに存在するというだけの関係で，２要素間のみならず，３要素以上の間にもみられることはいうまでもない。

(2)　エ

エは順序関係を表す記号で，“順序”または“順”と読むこととする。これはいわゆる順序のある場合で，順序の基準は大小であれ優劣であれ何でもかまわないのである。

順序は元来包含関係や大小関係から抽象されたものであるから，後で述べる包含は順序でもある。また，順序関係がある場合には，そこに組合せ関係が内包されていることもここで指摘しておくことにしよう。

(3)　ȸ

ȸは結合関係を表す記号で，“結合”または“結び”と読むこととする。結合関係は，最広義には，集合 A の要素 a と集合 B の要素 b との間に何らかの対応（結びつき）がある場合をさしている。これは非常に幅広い概念であるが，そのうち a と b の対応に関する関係規則（対応規則）f が確定できる場合は，

$$f : A \to B$$

となり，関数関係となる。

なお，結合関係の場合も，順序関係と同じように，そこに組合せ関係が内包されている。結合関係も，組合せ関係があってはじめて成り立つのである。

(4)　≺

≺は包含関係を表す記号で，“包含”または“包み”と読むことにしよう。この記号を使う場合は，≺の前件が後件を包含することを意味している。例えば，$A \prec B$ は A が B を包含していることを意味している。

包含関係も組合せ関係を内包しているし，前述のように順序関係は包含関係からとり出されているから，包含関係は順序関係を内包している。

3　縛り関係記号の説明

縛りとは関係をさらに特定の種類に限定することである。

(1)　結合関係の縛り

①　方向性の縛り

ȸ^1……一方向の結合（“結合一方向”と読む）

ȸ^2……双方向の結合（“結合双方向”と読む）

②　親和性の縛り

ȸ$^+$……親和的な結合（“結合プラス”と読む）

Φ^{-}……対立的な結合（“結合マイナス”と読む）

(2) 順序関係の縛り

① 数量的な縛り

エ^{n}……数量的な順序（大小など）（“順序エヌ”と読む）

$a\ \text{エ}^{n}\ b$ は $a>b$ とする。

② 時間的な縛り

エ^{t}……時間の順序（前後など）（“順序ティー”と読む）

$a\ \text{エ}^{t}\ b$ は a が b より時間的に先行していることを示すこととする。

③ 空間的な縛り

エ^{s}……空間上の順序（上下，左右，前後など）（“順序エス”と読む）

$a\ \text{エ}^{s}\ b$ の場合，空間的順序の基準はエ^{s}を使用する際に示すこととする。

4 関係変化記号の説明

ある関係が別の関係になることを関係の変化という。

(1) 変化記号：C

(2) 変化の表現法：変化前の関係をCの下方に，変化後の関係をCの上方に記すこととする。

例：$C^{\Phi}_{\sharp}(a \sharp b) \equiv a \Phi b$

(読み方) $C^{\Phi}_{\sharp}$は“♯からΦへの変化”または“変化♯，Φ”と読む

(単に“ロングC♯，Φ”と読んでもよい)。

(3) 使用規則

① 変化記号が適用される範囲にはかっこをつけることとする。

例：$C^{\Phi}_{\sharp}(a \sharp b) \sharp c \prec d \equiv a \Phi b \sharp c \prec d$

$a \Phi C^{\Phi}_{\prec}(b \prec c)\ \text{エ}\ d \equiv a \Phi (b \Phi c)\ \text{エ}\ d$

② 変化記号はいくつ重ねて使ってもよい。

例：$C^{\Phi}_{\sharp} C^{\text{エ}}_{\Phi}(a \sharp b \Phi c) \equiv a \Phi b\ \text{エ}\ c$

この例でもわかるように，変化記号は与式の関係の変化を示すもので変化の過程を示すものではない。この例でいえば，$C^{\Phi}_{\sharp} C^{\text{エ}}_{\Phi} \rightarrow C^{\text{エ}}_{\sharp}$ではないのである（♯→Φ，Φ→エ　∴♯→エではない)。

5 項間変化記号の説明

順序関係，包含関係の式における項間の置換を項間変化という。

(1) 項間変化記号：$\mathfrak{p}$

(2) 項間変化の表現法：$\mathfrak{p}$の次に置き換える項を記し，その次に与式（項間変化が行われる式）を記すこととする。

例：$\mathfrak{p}$（a b）$(a \prec b) \equiv b \prec a$

$\mathfrak{p}$（a b c）$(a$ エ b エ $c) \equiv b$ エ c エ a

$\mathfrak{p}$（a b）（c d）$(a$ エ b エ c エ $d) \equiv b$ エ a エ d エ c

（読み方）$\mathfrak{p}$は置換またはpermutationと読む。

$\mathfrak{p}$（a b c）は“置換a，b，c”と読む（単に“ピーa，b，c”と読んでもよい）。

(3) 説明

順序関係と包含関係には後述するように交換規則を適用できない。しかし，要素間の相互関係によったり，外部からのインパクトによって変化が生ずることがある。項間変化はそのことを表現するために設けられたものである。もちろん，関係計算の途中でこのような変化を仮定として導入し，推論や予測を行うこともできる。

6　共立関係記号の説明

二つ以上の関係が組合せになっている場合に，それを複合関係と呼ぶ。そして，この複合関係が同時に成り立つ場合に，それを共立関係という。

(1) 共立関係記号：・

(2) 共立関係の表現法

例えば，a ゆ b と a エ b が共立関係にあれば，次のように表することができる。

a ゆ・エ b

この場合には関係記号を並べる際の優先順位が問題となるが，どちらを先に出しても同じで，構造が変わるわけではない。したがって，優先順位は特に問わない。

（読み方）・は“共立”と読む。

7　形成規則

記号を定めると，次には記号を配列して式（formula）をつくる形成規則（formation rule）が必要となる。ここでは次の二つを定めておく。

① 文字A，B，C…はそれ自身式である。

② A，Bが式ならば，$A \# B$，A エ B，A ゆ B，$A \prec B$も式である。さらにA→B，A≡Bもまた式である。

8　関係計算規則

関係計算を行うためには，計算規則が必要である。

(1) かっこと結合力の強さについて

かっこは数学や論理学の使い方に準ずるが，かっこを取り除いても誤解を生ずるおそれのないときには取り除く。その場合，関係記号の結合強度が問題となるので，次のように定める。

結合力の強さ，１位，$\mathbin{\text{ф}}$，$\prec$
　　　　　　　２位，$\mathbin{\text{工}}$
　　　　　　　３位，$\#$

これは，１位の結合力が一番強く，３位が一番弱いことを示している。したがって，

$a \# b \mathbin{\text{ф}} c$ ……………(1)

という関係式があれば，これは $b \mathbin{\text{ф}} c$ が a と組合せの関係にあることを示している。これに対し，

$(a \# b) \mathbin{\text{ф}} c$ ……………(2)

という場合は，$a \# b$ が c と結合関係にあることを示している。式(2)の場合はかっこがないと，b と c が結合関係にあることになってしまい，式(1)と同じになってしまう。ただし，

$a \# (b \mathbin{\text{ф}} c)$ ……………(3)

はかっこがあってもなくても関係は同じである。

なお，・はこれらすべてより結合力が強い（したがって，順位づけをすれば０位である）。

(2) 置換規則

関係計算にあっても，式の中にある項を他の項で置き換えることができる。ただしその場合には，ある項すべてを置き換えようとする他の項で置き換えなければならない。

また，式 M が N と関係同値であれば，任意の式 A の中の M に N を代入することもできる。

(3) 交換規則

i）$a \# b \equiv b \# a$

ii）$a \mathbin{\text{ф}} b \equiv b \mathbin{\text{ф}} a$

しかし，$a \mathbin{\text{工}} b \fallingdotseq b \mathbin{\text{工}} a$，$a \prec b \fallingdotseq b \prec a$

(4) 結合規則

i）$(a \# b) \# c \equiv a \# (b \# c)$

ii）$(a \mathbin{\text{工}} b) \mathbin{\text{工}} c \equiv a \mathbin{\text{工}} (b \mathbin{\text{工}} c)$

iii）$(a \mathbin{\text{ф}} b) \mathbin{\text{ф}} c \equiv a \mathbin{\text{ф}} (b \mathbin{\text{ф}} c)$

iv）$(a \prec b) \prec c \equiv a \prec (b \prec c)$

(5) 反復規則

i) $a \sharp a \equiv a$

しかし，a 工 $a \rightarrow a$，a ゆ $a \rightarrow a$，$a \prec a \rightarrow a$

(6) 分配規則

i) a 工（$b \sharp c$）$\equiv$（a 工 b）$\sharp$（a 工 c）

ii) a ゆ（$b \sharp c$）$\equiv$（a ゆ b）$\sharp$（a ゆ c）

iii) $a \prec$（$b \sharp c$）$\equiv$（$a \prec b$）$\sharp$（$a \prec c$）

iv) a ゆ（b 工 c）$\equiv$（a ゆ b）工（a ゆ c）

v) $a \prec$（b 工 c）$\equiv$（$a \prec b$）工（$a \prec c$）

なお,（$a \sharp b$）工（$c \sharp d$）などは i）の a を $a \sharp b$ に，b を d に置き換えることによって展開できる。

(7) 分離規則

$a \sharp b \rightarrow a$，b

これは，組合せ関係にある要素を分離することができるという意味である。したがって，$a \sharp b \rightarrow a$，$a \sharp b \rightarrow b$ とすることができる。

(8) 導入規則

a，$b \rightarrow a \sharp b$

これは，a と b が存在していれば，組合せ関係をつくることができることを意味している。♯の説明でも述べたように，われわれの直視や思考の対象で，一定の範囲にあるものを一つの全体とみなすときに，その範囲内に存在するということだけの関係を組合せとしたから，a，b を一定の範囲にあるとみなすことによって，それらを組合せ関係でとらえることができる。分離と導入は，このように組合せ関係の場合にのみ可能である。

(9) 変形規則

変形規則は，これまで述べてきた関係記号の説明（一種の定義）および計算規則(2)〜(8)から派生するもので，ここでは関係計算によく使われるものをいう。変形規則は，無数に近いくらい存在すると考えられる。なぜなら関係計算に含まれる式の変形は，すべて変形規則にすることができるからである。しかし，それを列挙することはあまり意味がないので，ここでは使用頻度の高いものだけをあげておきたい。必要に応じ追加し，計算の便を図ればよいのである。

i) a 工 $b \rightarrow a \mp b$

ii) a ゆ $b \rightarrow a \mp b$

iii) $a \prec b \rightarrow a \mp b$

iv) $a \prec b \rightarrow a$ 工 b

以上のことは関係記号の説明の中に含まれている。例えば，ｉ）は順序関係が組合せ関係を内包していることに基づいている。ii）～iv）も同様である。

v）a エ（a ＃ b）→ a エ b

vi）a ⊕（a ＃ b）→ a ⊕ b

vii）$a \prec$（a ＃ b）→ $a \prec b$

これらはいずれも，分配規則，反復規則，分離規則を用いて導出することができる。例えばｖ）は次のようにして導出できる。

a エ（a ＃ b）	
≡（a エ a）＃（a エ b）	分配規則
→ a ＃（a エ b）	反復規則
→ a エ b	分離規則

これにより，関係記号の前後に同じ項がある場合は，そのいずれかを落とすことが可能となる。

たとえば，次のようなことができる。

a ⊕（a エ b）	
→ a ＃（a エ b）	変形規則 ii）
→ a エ b	分離規則

また，これは次のようにすることもできる。

a ⊕（a エ b）	
→ a ⊕（a ＃ b）	変形規則ｉ）
→ a ⊕ b	変形規則 vi）

共立関係は，定義により組合せ関係に変形することができる。

例：（a エ b）・（c ⊕ d）

→（a エ b）＃（c ⊕ d）

⑽　関係計算の手順

はじめに述べたように，関係計算は関係についての式を操作し，新たな関係の式の導出を行ったり，何らかの関係の証明を行ったりすることをさしている。関係計算を行う目的はさまざまで，いくつかの前提を手がかりに，かくれた関係を明らかにしようとすることもあるであろうし，ある条件のもとである関係が成り立つかどうかを確かめようとすることもあるにちがいない。しかし，いずれの場合にしても，関係計算の方法は同じである。次にその手順を示しておく。

① 問題を確認する。

② 問題を解くための前提あるいは仮定を式に表す。
　前提式はあらかじめ設定したものに限らず，計算の途中でも導入できる。

③ 式にはすべて番号をつける。

④　式を計算規則に従って操作する。

⑤　その際，式の右側に使用した計算規則と式番号を明示する（自明であれば省略してもよい）。

⑥　また式の左側にはその式に含まれる前提式番号をすべて明示する（その式を導出する際に用いた前出式に含まれている前提式もすべて明示する）。

⑦　すべての前提式番号を含む式があらわれたときは，いつでもその計算を終了することができる。

計算をどこで終了するかは，問題による。また，計算を終了しても，それを最初に立てた問題に照らして解釈するという作業を行わなければならない。最初の問題はある世界ないし領域の中での問題であり，それを関係計算によって解明しようとする際に，関係計算の用語に置き換え，関係計算の規則に従って関係解明の操作をしたのであるから，それを元に戻す必要があるのである。

(1)　関係計算の例

関係計算の方法は，ただ手順だけを述べたのではわかりにくいので，ここで計算の例をあげておきたいと思う。ただし，ここでは，計算の手順を示すだけであるから，問題を関係式に直すところと，それをまたもとの問題状況の中へ戻すところ（解釈）は省略する。

(例)

あるものの構成要素が a，b，c で，a と b が結合関係にあり，a と c が組合せ関係にあるとき，その構造を関係面からとらえてみることにしよう。

まず前提式を書く。

(1)　$a \mathbin{\Phi} b$

(2)　$a \mathbin{\#} c$

次に，関係計算の方法③～⑥によって，次のように計算をする。

	(1)	$a \mathbin{\Phi} b$	前提
	(2)	$a \mathbin{\#} c$	前提
1，2	(3)	$(a \mathbin{\Phi} b) \mathbin{\#} (a \mathbin{\#} c)$	(1)(2)，導入規則
		$\equiv (a \mathbin{\#} a \mathbin{\Phi} b) \mathbin{\#} c$	交換規則，結合規則
1，2	(4)	$a \mathbin{\Phi} b \mathbin{\#} c$	(3)，変形規則

これは，結合関係にある a，b に c が組合せの形で存在していることを示している。

Ⅱ　非共立関係計算体系

複合関係の中には共立関係とはならないものがある。例えば，a と b の間にфとエの関係があるが，一方が出現するときに他方が出現しない場合などがそうである。また，фとエのうちの一方を確定しようとすると，それがすぐにもう一方の関係になってしまい，それを確定しようとすると，すぐにまたもとの関係に戻ってしまう，というような場合には，この両者（фとエ）の関係は aф・エ b とはならない。

このように複合関係が同時に成り立たない関係を扱う計算体系を，非共立関係計算体系とよぶことにしよう。

1　記号

共立関係計算体系の記号の①（式）～⑧（関係同値）までは，非共立関係計算体系の場合も同じである。

⑨　複合関係

非共立関係記号：◦

2　非共立関係記号の説明

非共立関係は二つ以上の関係が存在するにもかかわらず，それらが同時に成り立たない場合である。したがって，共立関係では，例えば aф・エ b を aф b と a エ b に分けることができ，それらが同時に成り立つということができるが，非共立関係ではそのように分けることはできない。

(1)　非共立関係の表現法

例えば，a と b の間にфとエの関係があり，それらが同時に成り立つことがない場合には，次のように表すことができる。

aф◦エ b

この場合も共立関係と同様にфとエのいずれを先に書いても構造は変わらない。

式の場合には，

（aф◦エ b）エ◦≺（c ♯ d）

$A◦B$

のように表すことができる。$A◦B$ は A と B の中にすでに関係が含まれており，それが非共立関係になっていることを意味している。

また，関係変化の場合にも，

$C^{\prec}_{\sharp}\circ C^{\text{エ}}_{\sharp}$（$a$ ♯ b）

のように，非共立の関係変化を表すことができる。これは次のことを意味している。

$$C^{\prec}_{\sharp}\circ C^{\top}_{\sharp}(a\sharp b)\equiv C^{\prec}_{\sharp}(a\sharp b)\circ C^{\text{エ}}_{\sharp}(a\sharp b)$$

(2)　非共立関係式

項や式の複合関係を非共立関係記号で表した式を非共立関係式という（区別する必要があれば，共立関係記号で結んだ式を共立関係式とよぶ)。

例：a ⧞∘エ b，$A\circ B$

（a ⧞∘エ b）エ∘≺（c ♯ d）

形成規則は共立関係計算体系と同じである。

3　関係計算規則

(1)　かっこと結合力の強さについて

かっこと結合力の強さも共立関係体系と同じで，∘は・と同様に⧞，≺，エ，♯よりも結合力が強い（∘と・は同順位である)。

(2)　置換規則

共立関係計算体系と同じである。

(3)　交換規則

i）a ⧞∘♯ b ≡ b ⧞∘♯ a

ii）a ⧞$^{+}$∘⧞$^{-}$ b ≡ b ⧞$^{+}$∘⧞$^{-}$ a

iii）$a\prec\circ\succ b\equiv b\prec\circ\succ a$

iv）a エ^{s}∘^{s}エ b ≡ b エ^{s}∘^{s}エ a

v）a エ^{t}∘^{t}エ b ≡ b エ^{t}∘^{t}エ a

(4)　結合規則

aⓐ（bⓐc）≡（aⓐb）ⓐc

ただしⓐは非共立関係。

具体的には⧞∘エ，≺∘♯など，以下同じ。

(5)　反復規則

aⓐ$a\equiv a$（♯∘♯の場合）

aⓐ$a\rightarrow a$（♯∘♯以外の場合）

(6)　組み替え規則

非共立関係計算体系では，次の組み替え規則が成り立つ（分配規則にあたる)。

i）$(a ⓐ b)$ ⓑ $(c ⓨ d)$

$\equiv (a ⓐ b) \circ (c ⓨ d) \circ (a ⓑ c) \circ (a ⓑ d) \circ (b ⓑ c) \circ (b ⓑ d)$

ii）$a ⓐ (b ⓑ c) \equiv (b ⓑ c) \circ (a ⓐ b) \circ (a ⓐ c)$

iii）$(a ⓐ b) ⓑ c \equiv (a ⓐ b) \circ (a ⓑ c) \circ (b ⓑ c)$

ただし，ⓑ，ⓨは ⓐ 以外の非共立関係（以下同じ)。

(7) 消滅規則

非共立関係計算体系では，次の消滅規則が成り立つ（分離規則にあたる)。

$a \sharp \circ \sharp b \to a,\ b$

式の場合についても同様に，

$A \sharp \circ \sharp B \to A,\ B$

(8) 生成規則

消滅規則の逆として，次の生成規則が成り立つ（導入規則にあたる)。

$a,\ b \to a \sharp \circ \sharp b$

式についても，

$A,\ B \to A \sharp \circ \sharp B$

(9) 変形規則

変形規則の定義は共立関係計算体系の場合と同じである。したがって，変形規則は必要に応じて導出すればよいが，ここではそのいくつかをあげておく。

i）$a ⓐ b \to a \sharp \circ \sharp b$

ii）ⓐに含まれるエ，Ф，≺ について，エ→♯，Ф→♯，≺→♯，≺→エ

iii）$A ⓐ B \to A \circ B$

iv）$A \circ B \to A \sharp \circ \sharp B$

v）$A ⓐ B \to A$　または $A ⓐ B \to B$

vi）$a ⓐ (a ⓑ b) \to (a ⓑ b)$

vii）$(a ⓐ b) ⓑ b \to (a ⓐ b)$

viii）$a ⓐ (a ⓑ b) \to (a ⓐ b) \circ (a ⓑ b)$

ix）$(a ⓐ b) ⓑ b \to (a ⓐ b) \circ (a ⓑ b)$

X）$(a ⓐ b) ⓑ (c ⓨ d) \to (a ⓑ c) \circ (a ⓑ d) \circ (b ⓑ c) \circ (b ⓑ d)$

$\to (a ⓑ c) \circ (a ⓑ d) \circ (b ⓑ c)$

$\to (a ⓑ c) \circ (a ⓑ d)$

$\to (a ⓑ c)$

xi）$a ⓐ (b ⓑ c) \to (a ⓐ b) \circ (a ⓐ c)$

$\to (a ⓐ b) \circ (b ⓑ c)$

→（a ⓐ c）∘（b Ⓑ c）

→（a ⓐ b）

xii）a ∘（b ⓐ c）→ a ♯∘♯（b ⓐ c）

xiii）a ∘（b ⓐ c）→（b ⓐ c）

⑽ 関係計算の方法

共立関係計算体系の場合と同じである。

4　非共立関係の共立関係化

非共立関係式で関係記号が反復されれば，それは共立関係の式と同じである。

i）a ♯∘♯ b ≡ a ♯ b

ii）a エ∘エ b ≡ a エ b

iii）a Ф∘Ф b ≡ a Ф b

iv）a ≺∘≺ b ≡ a ≺ b

また，共立関係や非共立関係も複合関係という関係であるから，関係変化記号を用いてその変化を表すことができる。したがって，

C⁚（a ♯・エ b）≡ a ♯・エ b

のように，非共立関係を共立関係に変えることができる。

5　共立関係の非共立関係化

④の i）～iv）を用いて共立関係を非共立関係とすることができる。また，関係変化記号を用いて変えることもできる。

例：C⁚（a ♯・エ b）≡ a ♯・エ b

Ⅲ　半共立関係計算体系

関係式の中には，共立関係式と非共立関係式を同時に含む関係式がある。ここではそれを半共立関係式とよび，その計算体系を半共立関係計算体系ということにしよう。

例えば，次にあげるような関係式は半共立関係式である。

例：（a ⦶◦エ b）＃（c ≺◦＃ d）

（a ⦶◦エ b）エ・≺（c ≺◦＃ d）

半共立関係計算体系は，共立関係式の部分に共立関係計算体系を，また非共立関係式の部分には非共立関係計算体系を適用する計算体系である。したがって，半共立関係計算にあっては，この両計算体系の規則を同時に用いるが，その場合に問題となるのが分配規則である。

関係計算体系の分配規則は，結合力の強さの順位が違う場合にのみ成り立つので，非共立関係式では成り立たないが，半共立関係式で結合力の強さの順位が違う場合についてはすべて成り立つ。

1　半共立関係計算体系のみの計算規則

⑴　分配規則

i）a α⃝（b ＃ c）≡（a α⃝ b）＃（a α⃝ c）

ii）a α⃝（b エ c）≡（a α⃝ b）エ（a α⃝ c）

iii）a α⃝（b ⦶ c）≡（a α⃝ b）⦶（a α⃝ c）

iv）a α⃝（b ≺ c）≡（a α⃝ b）≺（a α⃝ c）

半共立関係計算体系の計算方法も共立関係計算体系の場合と同じである。

関係事象をながめてみると，共立関係と非共立関係が入り組んでいることも多いので，関係解明の際には，この半共立関係計算体系がいちばん多く使われるのではないかと思われる。

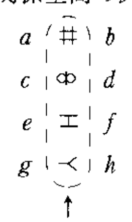
Ⅳ　関係変換

ある関係が別の関係になることを「関係の変化」といい，関係変化記号$\mathcal{C}$を用いて変化を表したが，それはある構造Sの関係Rが，別の関係R'になることであり，その構造内部での作用は扱うことができなかった。

関係変換（conversion of relation）は，関係記号で表される関係が他の関係になる際の関係内部の作用についての計算法である。

1　関係空間

関係空間の例



関係空間

関係が存在する空間を関係空間という。

関係空間には実体としての要素は存在しない。

2　関係作用素

関係を作り，維持する作用の仕方を関係作用素（relation operator）という。

関係作用素には，次のような種類のものがある。

(1)　方向子（D）

方向子（direction operator）は，要素間に方向性を与え，それを維持する作用の仕方のことである。

(2)　規制子（R）

規制子（regulation operator）は，要素間に規制を与え，それを維持する作用の仕方のことである。

(3)　内化子（I）

内化子（internalization operator）は，ある要素が他の要素をその内部に取り込み，それを維持する作用の仕方のことである。

(4)　縛り関係作用素

関係作用素で縛りがあるのは，次の７つである。

D^n（数量的な縛り方向子。方向子エヌと読む。）

D^t（時間的な縛り方向子。方向子ティーと読む。）

D^s（空間的な縛り方向子。方向子エスと読む。）

R^1（一方向の規制子。規制子一方向と読む。）
R^2（双方向の規制子。規制子双方向と読む。）
R^+（親和的な規制子。規制子プラスと読む。）
R^-（対立的な規制子。規制子マイナスと読む。）

(5) 反関係作用素

関係作用素を消滅させる作用素を反関係作用素（又は反作用素）という。

3 関係変換の計算

関係変換は関係作用素の作用によって関係が変えられることであるが，具体的には関係作用素を操作して関係変換を導出したり，証明したりすることである。

(1) 関係構成とパターン数

ある関係を構成する関係作用素の全体を関係構成といい，次のように表す。

例 $$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(2) \\ I(1) \end{bmatrix}$$

関係作用素を並べる順序は問わない。それぞれの関係作用素のかっこ内の数字は，その作用素のパターン数を表す。

パターンとはある作用素の内容のことである。同じ作用素でもパターンが同じとは限らない。たとえば上の例の$R(2)$は，Rのパターンが２種類あることを表している。

関係構成の中にある関係作用素が０の場合には，表示する必要がなければ省略してもよい。

例 $$\begin{bmatrix} D(0) \\ R(2) \\ I(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(2) \\ I(1) \end{bmatrix}$$

反関係作用素のパターン数は負数で表す。

また，次元変換（後出）により，±の関係作用素が生ずることもある。

例 $$\begin{bmatrix} D(-1) \\ R(\ 2) \\ I(\pm 1) \end{bmatrix}$$ （Dは反作用素，Ｉは±の作用素）

(2)　関係と関係構成の対応

関係♯，エ，⦵，≺は関係構成によって，次のように表すことができる。縛りのある場合も同様である。

$$\sharp \equiv \begin{bmatrix} D(\sim a) \\ R(\sim a) \\ I(\sim a) \end{bmatrix} \qquad \text{エ} \equiv \begin{bmatrix} D(\ a) \\ R(\sim a) \\ I(\sim a) \end{bmatrix}$$

$$\text{⦵} \equiv \begin{bmatrix} D(\ *) \\ R(\ a) \\ I(\sim a) \end{bmatrix} \qquad \prec \equiv \begin{bmatrix} D(*) \\ R(*) \\ I(a) \end{bmatrix}$$

ただし，aは＋の数

　　　$\sim a$は０，－，±のいずれかの数

　　　＊は＋，０，－，±のいずれでもよい数

縛りのある場合の例

$$\text{エ}^{n} \equiv \begin{bmatrix} D^{n}(\ a) \\ R(\sim a) \\ I(\sim a) \end{bmatrix} \qquad \text{⦵}^{+} \equiv \begin{bmatrix} D(*) \\ R(*) \\ R^{+}(\ a) \\ I(\sim a) \end{bmatrix}$$

参考

関係と関係構成の対応表

関　係	エ	エ^n	エ^s	エ^t	⦵	⦵^{1}	⦵^{2}	⦵$^+$	⦵$^-$	≺
｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜
関係構成	D	D^n	D^s	D^t	R	R^1	R^2	R^+	R^-	I

(3)　関係変換の計算規則

関係変換には，合成，分解，単なる変換がある。

①　合成は，関係を関係構成に転換して並べ，同種の関係作用素のパターン数を加えて，関係構成を合成する。

　ただし，±を次元変換ではなく，関係変換で扱う時には，±のパターンのみで加法計算を

行う。

例１　aエ・≺bの場合の１つの例

$$\begin{bmatrix} D(\ \ 1) \\ R(\ \ 0) \\ I(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(-2) \\ R(\ \ 1) \\ I(\ \ 1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(-1) \\ R(\ \ 1) \\ I(\ \ 0) \end{bmatrix}$$

例２　a≺・⦶bの場合の１つの例

$$\begin{bmatrix} D(\pm 1) \\ D(-1) \\ R(\ \ 0) \\ I(\ \ 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(\pm 2) \\ D''(\ \ 2) \\ R(\ \ 1) \\ I(-1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(\pm 3) \\ D(-1) \\ D''(\ \ 2) \\ R(\ \ 1) \\ I(\ \ 0) \end{bmatrix}$$

②　分解は関係を関係構成に転換し，関係作用素のパターン数を操作して，関係構成を分解する。

例１　a≺bの場合の１つの例

$$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(0) \\ I(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(1) \\ R(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(0) \\ R(0) \\ I(1) \end{bmatrix}$$

③　単なる変換は合成や分解と同じ操作を行っても，関係の数が変らない場合である。これは関係作用素の組み換えなので，そう呼んでもよい。

④　関係作用素による計算結果は「関係と関係構成の対応」を用いて関係に転換する。

関係変換による導出は⇒で表す。

①の例の場合

（例１）aエ・≺b⇒a⦶b

（例２）a≺・⦶b⇒a⦶b

②の例の場合

a≺b⇒a≺・エb

(4) 関係変換のステップ

関係変換は1通りではなく，複数の可能性のあることが多い。複数の可能性がある場合には，「関係変換表」を作り，その中から最適解を取り出す。以下にそのステップを示しておく。

「関係変換表」の作成ステップ

ステップ1　表を作りたて方向に共立関係をとる。(問題としている関係の中に縛り関係がある場合には，それも含める。)

ステップ2　表のよこ方向には関係をとり，n個の欄を作る。

ステップ3　問題としている関係の関係構成にある関係作用素のパターン数を合計する。

ステップ4　各関係作用素のパターン数を分解して，すべての組合せを作る。

ステップ5　「関係と関係構成の対応」により，ステップ4のすべての組合せをあてはまる欄に記入する。

例1　≺の関係構成が $\begin{bmatrix} D(1) \\ R(2) \\ I(1) \end{bmatrix}$ の場合

表中では $\begin{bmatrix} D(x) \\ R(y) \\ I(z) \end{bmatrix}$ を $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$ と略記する。

$D=1\quad R=2\quad I=1$	(1) エ Φ ≺	(2) エ Φ ≺	(3) エ Φ ≺	(4) エ Φ ≺
エ	—			
エ・Φ	—			
エ・≺	$\begin{array}{c\|c} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}$			
Φ	—			
Φ・≺	$\begin{array}{\|cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{\|cc} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{\|cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{\|cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$
≺	$\begin{array}{\|c\|c} & 1 \\ & 2 \\ & 1 \end{array}$			
エ・Φ・≺	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$		

注　棒線は，そのところがないことを示す。

ステップ１：ここで問題としているのは≺で縛りはないから，たて方向には縛りのない７つの共立関係を記入する。(＃は$D=0$，$R=0$，$I=0$の場合であるから，いつでも追加できる。)

ステップ２：ここでは＃を省略し，(エ，ф，≺）の欄をn個作る。(実際には４個までしかなかった。)

ステップ３：D（１）は（０，１）

R（２）は（０，２)，(１，１）

I（１）は（０，１）

D，R，Iから１つずつ組合せを作る。

ステップ４：それを表中に記入したのが，上の表である。

これにより，この場合の≺は次のような関係変換が可能であることがわかる。

≺⇒エ・≺　（関係構成は１通り）

⇒ф・≺　（関係構成は４通り）

⇒エ・ф・≺（関係構成は２通り）

例２　エ・ф⁺・≺が

$$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ R^{+}(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D(0) \\ R(0) \\ R^{+}(1) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D(0) \\ D(1) \\ R^{+}(0) \\ I(1) \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \text{の場合}$$

ステップ１：この場合はф⁺が含まれているので，エ，ф，ф⁺，≺の組合せを作る。

エ，ф，ф⁺，≺，(エ・ф)，(エ・ф⁺)，(エ・≺)

(ф・ф⁺)，(ф・≺)，(ф⁺・≺)，(エ・ф・ф⁺)

(エ・ф・≺)，(エ・ф⁺・≺)，(ф・ф⁺・≺)

(エ・ф・ф⁺・≺)

ステップ２：(エ・ф・ф⁺・≺）の欄をn個作る。

ステップ３：D(１)は(０，１)

R(１)は(０，１)

R^{+}(１)は(０，１)

I(１)は(０，１)

D，R，R^{+}，Iから１つずつ取った組合せ作る。(省略)

ステップ４：表中に記入（表は省略）

4．関係の実体に対する影響－パターン数量の計算

関係は，実体としての要素に影響を与えるが，それを数量的に表し，影響を計算することができる。それは関係作用素に何らかの数量を与えることによって行われる。このように関係作用素に与えられる数量のことをパターン数量と呼ぶ。

例

$$a \begin{pmatrix} \alpha_1 D\ (n_1)\ \beta_1 \\ \alpha_2 R\ (n_2)\ \beta_2 \\ \alpha_3 I\ \ (n_3)\ \beta_3 \end{pmatrix} b$$

$n_1 \cdots n_3$：パターン数

$\alpha_1 \cdots \alpha_3$：右方向（→）の影響を表すパターン数量

$\beta_1 \cdots \beta_3$：左方向（←）の影響を表すパターン数量

a，b　：要素（実体）

パターン数量に方向性を与えた場合に，それを有向パターン数量と呼び，左から右へ向う場合を右方向パターン数量，右から左へ向う場合を左方向パターン数量と呼ぶことにしよう。

(1) パターン数量の計算

パターン数量の計算法は，以下に示す通りである。

計算の全体を

$a\ (R)\ b$ ……(1)

で表す。

ただし

$$(R) = \begin{pmatrix} \alpha_1 D\ (n_1)\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n I\ (n_n)\ \beta_n \end{pmatrix}$$（α，βは影響）

右方向への計算は，Rの右方向への影響をR_1とすると，

$a * R_1 * b$ ……(2)

左方向への計算は，Rの左方向への影響をR_2とすると，

$b * R_2 * a$ ……(3)

となる。

ただし，＊は集合計算，四則計算，論理計算等の何らかの計算である。

また，

$R_1 = (n_1 * \alpha_1) * (n_2 * \alpha_2) * \cdots\cdots * (n_n * \alpha_n)$ ……(4)

$R_2 = (n_1 * \beta_1) * (n_2 * \beta_2) * \cdots\cdots * (n_n * \beta_n)$ ……(5)

(2) パターン数量計算のモデル

① $a \times R_1 + b$（bに$a \times R_1$を加える。）

② $a \times R_1 \rightarrow b$（$a$と$R_1$の直積が$b$への写像となる。）

③ $(a \to R_1) \times b$ (aに対応するR_1をbに掛ける。)

④ $\max\{a,\ R_1\} \to b$ (aとR_1の大きい方がbへの写像となる。)

など

〈R_1の例〉

① $$R_1 = \frac{n_1 \times \alpha_1 + n_2 \times \alpha_2 \cdots + n_n \times \alpha_n}{n_1 + \cdots\cdots + n_n}$$

② $R_1 = n_1 \times \alpha_1 + n_2 \times \alpha_2 + \cdots + n_n \times \alpha_n$

③ $R_1 = (n_{11} \times \alpha_{11} + n_{12} \times \alpha_{12} + \cdots + n_{1n} \times \alpha_{1n}) + \cdots\cdots + (n_{n1} \times \alpha_{n1} + \cdots\cdots + n_{nn} \times \alpha_{nn})$

④ $$R_1 = \left\{ \begin{array}{llll} a\text{のカテゴリー} & \alpha_1\text{の数量} & +\cdots\cdots+ & \alpha_n\text{の数量} \\ 1 & \alpha_{11} & +\cdots\cdots+ & \alpha_{n1} \\ 2 & \alpha_{12} & +\cdots\cdots+ & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\ n & \alpha_{1n} & +\cdots\cdots+ & \alpha_{nn} \end{array} \right.$$

(R_1はaのいずれかのカテゴリーの数量をとる。)

など

[例題]

次のような構造の組織が合併すると，どのような構造になるか。また，その時の要素間の関係の影響を明らかにせよ。

$A \prec B \sharp C$ $\qquad\qquad$ $A \Phi B \sharp C \text{工} D$

$$\prec = \begin{bmatrix} D(\ \ 1) \\ R(-1) \\ I(\ \ 1) \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} D(\ \ 0) \\ R(\ \ 3) \\ I(-1) \end{bmatrix} \qquad \text{工} = \begin{bmatrix} D(\ \ 2) \\ R(-1) \\ I(\ \ 0) \end{bmatrix}$$

(解)

(1) 合併後の構造

	(1) $A \prec B \sharp C$	前提
	(2) $A \Phi B \sharp C \text{工} D$	〃
1，2	(3) $A \prec B \sharp C \sharp A \Phi B \sharp C \text{工} D$	(1)，(2)より
	$\equiv A \prec \cdot \Phi B \sharp C \sharp C \text{工} D$	
	$\equiv \mathrm{A} \prec \cdot \Phi B \sharp C \text{工} D$	

1，2　(4)　$A \prec\cdot \Phi B \sharp C \text{⌶} D$

$$\equiv A \begin{bmatrix} D(\ \ 1) \\ R(-1) \\ I(\ \ 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(\ \ 0) \\ R(\ \ 3) \\ I(-1) \end{bmatrix} B \sharp C \text{⌶} D$$

$$\equiv A \begin{bmatrix} D(\ \ 1) \\ R(\ \ 2) \end{bmatrix} B \sharp C \text{⌶} D$$

$\equiv A \Phi B \sharp C \text{⌶} D$　　　　(3)のA，B間の$\prec\cdot\Phi$を合成

(2)　要素間の関係の影響

要素間の関係の影響はパターン数量で表わされる。

AB間のパターン数量　　　　　　CD間のパターン数量

$A \begin{pmatrix} \alpha_1 D(1) \beta_1 \\ \alpha_2 R(2) \beta_2 \end{pmatrix}$ B　　　　　　$C\ (\alpha_3 D(2) \beta_3)\ D$

パターン数量は，①関係作用素の状態の変化に応じて変わる場合，②同じ関係作用素でも複数のパターンがすべて違う数量をとる場合もあるが，ここでは③同じ関係作用素のパターンはすべて同じ数量をとる場合についての計算をしてみよう。

1）クリスプ概念の場合

要素間のインプット，アウトプットが次のように観測できたとする。

$A \to B$		$B \to A$		$C \to D$		$D \to C$	
1	9.4	1	1.5	1	2	1	0
2	19.8	2	3	2	4	2	0
3	29.7	3	4.5	3	9	3	0

（順序関係で逆の影響はないのでCはすべて0）

線形回帰で解を求めると

$B = \alpha_1 A + 2\ \alpha_2 A + \gamma$　……(1)

$A = \beta_1 B + 2\ \beta_2 B + \gamma$　……(2)

$D = 2\ \alpha_3 C + \gamma$　　……(3)

ただしγは定数

(1)式（$A \to B$）

$\alpha_1 = 2.1$　$\alpha_2 = 2.65$　$\gamma = 2.5$

(2)式（$B \to A$）

$\beta_1 = 0$（順序関係の逆の影響はない。）

$\beta_2 = 0.75$，$\gamma = 0$

(3) 式 ($C \to D$)

$2\alpha_3 C = C^2 \quad \therefore \alpha_3 = 0.5C \quad \gamma = 0$

よって求める影響は

$$A \begin{pmatrix} 2.1 & D(1) & 0 \\ 2.65 & R(2) & 0.75 \end{pmatrix} B$$

ノイズ（外乱）は $A \to B$ の場合 2.5

C ($0.5C$ $D(1)$ 0) D

である。

2）ファジィ概念の場合

要素間のインプット，アウトプットをファジィ化して，プロダクション・ルールを作る。(これは$A \to B$の逆が$B \to A$とはならず，このような双方向の関係を問題にすることはできないので，ファジィ関数ではなく，プロダクション・ルールを求める。)

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$をファジィ数（メンバーシップ関数）とすると，

$A \to B$は $\hat{\alpha}_1 \circ 2\hat{\alpha}_2$（$\circ$は合成）

$B \to A$は $\hat{\beta}_1 \circ 2\hat{\beta}_2$

$C \to D$は $2\hat{\alpha}_3$

$D \to C$は $2\hat{\beta}_3$

となり，それぞれをプロダクション・ルールで表せばよい。

例　$A \to B$の場合

$\hat{\alpha}_1 \circ 2\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}$とする。

if A_1，$\hat{\alpha}_{11} \circ 2\hat{\alpha}_{21} = \hat{\alpha}_{11}$　*then*　B_{11}

〃 A_1，$\hat{\alpha}_{1:} \circ 2\hat{\alpha}_{22} = \hat{\alpha}_{12}$　〃　B_{12}

〃 A_1，$\hat{\alpha}_{1:} \circ 2\hat{\alpha}_{23} = \hat{\alpha}_{13}$　〃　B_{13}

⋮

〃 A_1，$\hat{\alpha}_{1:} \circ 2\hat{\alpha}_{2n} = \hat{\alpha}_{1n}$　〃　B_{1n}

A_2，A_3も同様に定める。しかし，これでは数が多くなるので，A_1，A_2……A_nの時のBの観測値B_1，B_2……B_nを求め，$\hat{\alpha}_{1x} \circ \hat{\alpha}_{2y} = \hat{\alpha}_{ny}$を見い出すとよいであろう。

A_1　$\hat{\alpha}_{1x} \circ 2\hat{\alpha}_{2y} = \hat{\alpha}_{ny}$　B_1

A_2　〃　B_2

⋮

A_n　〃　B_n

$\hat{\alpha}_{11}$ $\hat{\alpha}_{12}$…等ははじめは理論的に設定し，観測値を用いて修正する。

V 関 係 行 列

1．関係空間と関係行列・関係構成行列

われわれの関心の対象は，その対象の構成要素と要素間の関係でとらえられたが，その中から関係のみを取り出して関係空間を考えれば，それを関係行列，関係構成行列で表すことができる。

その場合の関係行列，関係構成行列の要素（α_{ij}）は対象の構成要素ではなく，その間の関係ないしは関係構成である。

例　関 係 行 列

$$\begin{array}{c|c} & a \quad b \quad c \quad d \\ \hline \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \Phi & \times & \prec \\ \times & \times & \text{エ} & \text{エ} \\ \text{エ} & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

×は無関係を表す

関係構成行列

$$\begin{bmatrix} \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \times & \times & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

ただし

$$\begin{bmatrix} D(n) \\ R(n) \\ I(n) \end{bmatrix}$$

関係空間と関係行列，関係構成行列は次のようになっている。

構成要素

対　象　$a - b - c - d$

関係空間　（関係　関係　関係）

例　（Φ　エ　$\prec$）

関係にはさまざまなものがあるが，ここでは組合せ（#），順序（エ），結合（Φ），包含（$\prec$）を取り出している。

⇩

関係行列

$$\begin{bmatrix} \times & \Phi & \times & \times \\ \times & \times & \text{エ} & \times \\ \times & \times & \times & \prec \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

関係空間にある関係を行列で表現する

⇩

関係構成行列

$$\begin{bmatrix} \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \times & \times \\ \times & \times & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \times \\ \times & \times & \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

関係行列をさらに関係構成の行列で表現する

2．関係行列・関係構成行列の規約

① 行列の要素（a_{ij}）は２項間の関係で前項を行とし，後項を列としたときの関係を表す。

例　　a エ b

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} \times & \text{エ} \\ \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

② 交換規則が成り立つ場合（♯，Φ）は，関係を右上の側に記すこととする。

例　　a Φ $b \equiv b$ Φ a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} \times & \Phi \\ \times & \times \end{bmatrix} \end{array} \qquad \left(\begin{bmatrix} \times & \times \\ \Phi & \times \end{bmatrix} \text{とはしない} \right)$$

③ ３つ以上の構成要素の関係は２つの構成要素に戻して表すこととする。

例　　a Φ（b エ c）$\equiv a$ Φ b エ a Φ c

したがって，ここには，a Φ b，a Φ c，b エ c の関係があることになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} \times & \Phi & \Phi \\ \times & \times & \text{エ} \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

④ 行と列の順序は最初にそれを示せば，行列毎に対象の構成要素（a，b，c など）を示す必要はない。たとえば，

「a，b，c の関係構成行列は次の通りである。」

「対象の構成要素を a，b，c の順に並べた場合の関係行列は次の通りである。」

などのように断れば，次のように表してよい。

$$\begin{bmatrix} \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \times \\ \times & \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \times & \times \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \Phi & \times \\ \times & \times & \prec \\ \text{エ} & \times & \times \end{bmatrix}$$

これらは，
a Φ b，
$b \prec c$，
c エ a
を行列で表したもの

⑤ 関係構成行列では関係作用素名を別に示せば，行列の中に作用素記号を入れなくてもよい。

例

$$\begin{bmatrix} \times & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \times \\ \times & \times & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \times \end{bmatrix} \quad \text{ただし} \begin{bmatrix} D\ (n) \\ R\ (n) \\ I\ (n) \end{bmatrix} \text{とする}$$

3．関係と関係構成の総数及び密度

関係行列を使えば，関係空間の関係総数や関係密度，関係構成の総数を計算でき，その関係空間の性質を検討することができる。

(1) 関係総数と関係密度の計算

関係総数計算は，｜　｜で表し，その答は（　）で表すことにする。（関係空間は［　］）

関係総数を RN，関係密度（relation density）を RD とすると，RN はその関係空間に存在する関係の総数，RD は（実際の RN）／（可能な RN）である。

例

$$\begin{vmatrix} \times & \Phi & \text{エ} & \times & \times \\ \times & \times & \Phi & \prec & \times \\ \times & \times & \times & \sharp & \prec \\ \text{エ} & \times & \times & \times & \sharp \\ \text{エ} & \times & \times & \times & \times \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ \sharp \\ 3\ \text{エ} \\ 2\ \Phi \\ 2\ \prec \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} RN &= 9 \\ RD &= 9/20 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

○♯が2，エが3，Φ が2，≺が2という関係空間は，特定の関係にあまり偏っていない空間となっている。

○すべての要素間に何らかの関係があれば，$5\times5-5=20$ であるので，関係の総数が9の場合の関係空間の密度は $9/20=0.45$ であることを意味している。ただし単一関係（a と a，b と b の関係など）を含めれば 5×5 であるので $9/25=0.36$ となる。

これはいずれ関係空間の一様性や局所性を検討する際に役立つ。

(2) 関係構成総数の計算

ある関係空間の関係構成についても，関係総数と同様に関係構成総数を計算することができる。それにより，その空間の性質を検討することができる。

関係構成総数の計算も｜　｜で表し，答は（　）で表す。次に示すのはその１例である。

$$\left|\begin{array}{cccc} \times & \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \\ \times & \times & \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} & \times \\ \times & \times & \times & \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} \\ \times & \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} & \times & \times \end{array}\right| = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} & + & - & \pm \\ D & (7) & (1) & (0) \\ R & (4) & (1) & (0) \\ I & (3) & (0) & (0) \end{array}\right) \end{array}$$

$$n = \overset{+}{(14)}\ \overset{-}{(2)}\ \overset{\pm}{(0)}$$

ただし $\begin{bmatrix}D\\R\\I\end{bmatrix}$

この例の場合には，Ｄが多くプラスの強い関係構成空間であることがわかる。

関係構成の場合には密度を問題にすることはできない。理由は母数がないからである。

Ⅵ　関係群論

関係空間にも数学の群論でいう群が存在する。

数学でいう群（group）は次のようなものをいう。

集合Gの元（要素）をa，b，c……とし，元の間の１つの演算法（・）が定義されていて，演算の結果を$a \cdot b$と書くとき，次の４条件（群公理）を満たすならば，Gはその演算に関して群であるという。

(1)　$a \cdot b$はGに属する。

(2)　$(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$（結合則）

(3)　Gのすべての元xに対して$x \cdot e = x$となるGの元eがただ１つ存在する。（単位元）

(4)　Gのおのおのの元xに対して$x \cdot x' = e$となるGの元x'がただ１つ存在する。（逆元）

ふつう群表が成立すれば，群であるので，群をさがす場合には群表を作ってみればよい。

１．関係と関係構成の次元

次元は連続体（時間，空間など）における互いに独立した広がりの空間である。

例　直線，時間…１次元（１方向）

　　平面　………２次元（２方向）

　　空間　………３次元（３方向）

関係，関係構成を連続体としてとらえると，そこには♯，エ，ф，≺，D，R，Iの互いに独立した広がりの方向がある。ここではそれを関係の次元，関係構成の次元と呼ぶことにしよう。

(1)　関係の次元

関係空間は♯，エ，ф，≺より成るので４次元である。さらに各関係（♯，エ，ф，≺）は関係構成より成るので，次元数は次の通りである。

♯……０次元

エ……１次元（Dのみ）

ф……２次元（Rだけではなく，Dがあってもよい。）

≺……３次元（Iだけではなく，D，Rがあってもよい。）

(2)　関係構成の次元

関係構成空間はD，R，Iより成るので３次元である。

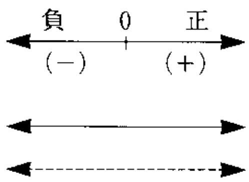
各関係作用素（D，R，I）は，それぞれ１方向のみしかないから１次元である。縛りは独立した広がりの方向ではなく，D，R，Iがそれぞれある特質をおびた場合にすぎないので，別の次元とみることはできない。

2．次元変換群

(1) 次元と反次元

次元は前述のように連続体における互いに独立した広がりの方向である。

このような実在の次元に対し，反実在の世界での同様の広がりの方向をここでは反次元と呼ぶことにしよう。ある実在の次元を座標軸で表わせば，それを正，0，負に分けることができる。しかし，その中の負は，実在している次元の中の0より小さい値をとる領域のことであり，実在とは反対の世界の反次元ではない。



座標軸（1次元）

次元（実在）

反次元（反実在）

反実在の世界はとらえることができない。しかし，反実在は実在にかかわりをもつと実在を消す作用をするので，その作用によって反実在の存在を知ることができる。したがって，反次元もとらえることはできないが，実在の次元にかかわりをもつとその次元を消してしまうので，そのことによって反次元の存在を知ることができる。具体的にはそのような作用を事象の中に見い出し，それを反次元の作用ととらえる。

例　財産と負の財産，反財産

経済的な財産を考えると，貯えられた正の財産の他に借金のような負の財産がある。しかし，それらはいずれも実在の財産の次元に存在している。

それに対し，財産の反次元が存在し，そこには反財産がある。それをもつと，財産を消そうとする意識が表出して行動し，財産を無くしてしまう。

(2) 次元変換群の存在

以上のような次元と反次元の間の変換を考えると，その変換は群となっている。

次元変換群

(i) 元

＋変換……次元の作用による次元変換

−変換……反次元の作用による次元変換

±変換……次元，反次元の作用を同時に作用させる次元変換

単位元 e は「±」である。

(ii) 演算☆

＋☆＋→−　　＋☆±→＋

−☆−→＋　　−☆±→−

+☆−→±　　(このように演算を定める)

(iii) 逆元

「+」と「−」は互いに逆元となっている。

+☆−→±

(iv) 結合則

☆はどの順序で演算を行っても結果は変らないので結合則は成り立つ。

次元変換群の群表

	±	+	−
±	±	+	−
+	+	−	±
−	−	±	+

群表の各行に同じ元が繰り返し現れないので群表は成立する。したがって，これは群である。

3．関係次元変換群−その1：関係作用素次元変換群

関係次元変換群は1つとは限らないであろうが，上述の次元変換群に関係作用素の次元変換群がある。

関係作用素には作用素と反作用素があるが，反作用素はその定義からみれば，反次元の側に存在するものといえる。したがって，上述の次元変換群による次元変換を行うことができる。

ここでは，次元変換群の次元変換を，次のように関係作用素にあてはめてみることにしよう。

+……作用素による次元変換

−……反作用素による次元変換

±……作用素，反作用素による次元変換

関係作用素の次元変換の結果，−，±となったものは関係には表出しない。これらは関係作用素が0の場合と同じ扱いとする。

例

$$\begin{bmatrix} D(\ \ 1) \\ R(-1) \\ I(\pm 1) \end{bmatrix} \cdots エ \qquad \begin{bmatrix} D(1) \\ R(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \cdots エ$$

関係作用素が0の場合は，次元変換群による演算は行えない。

例

$$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \equiv D(1) \quad \left(\begin{array}{l} D(1)\text{は演算により変るが，}R(0)\text{，} \\ I(0)\text{は変らない。} \end{array} \right)$$

演算例

$D(1)\ [\pm] = D(\ \ 1)$　　$R(-1)\ [\pm] = R(-1)$

$D(1)\ [+] = D(-1)$　　$R(-1)\ [+] = R(\pm 1)$

$D(1)\ [-] = D(\pm 1)$　　$R(-1)\ [-] = R(\ \ 1)$

$D(0)\ [+] = D(\ \ 0)$

エに作用素次元変換のうちの＋変換を行うと♯になる例

$$\underset{\text{エ}}{\begin{bmatrix} D(\ \ 2) \\ R(\ \ 0) \\ I(-1) \end{bmatrix}}\ [+] = \underset{\sharp}{\begin{bmatrix} D(-2) \\ R(\ \ 0) \\ I(\ \ \pm) \end{bmatrix}}$$

外部から何の作用もないのに関係変換が生じた場合には，内部でこのような作用素の次元変換が起っている可能性がある。

Ⅶ　関係・力変換

関係は構造の構成要素間にあって何らかの影響を及ぼしている。それは要素が他の要素に及ぼす影響とは異なるものである。ある要素の影響はいうまでもなく関係を通して他の要素に及ぶが，それはすべての関係について一様ではない。ある要素が他に対して同じ力を加えようとしても，関係の違いによって，その影響力は違ってくる。そのことは，力が作動する時には，関係も影響力をもっていることを意味しており，関係が力に転化することを意味している。

ここでは関係と力の互換計算法を提出することにしよう。これにより関係は力に置き換えられる。力は質量と互換できるから，関係は力を通して質量に置き換えられることにもなる。このことは関係と実体に互換性があるかも知れないことを示唆している。

1．関係の作用力を力として表現する方法

(1)　力の記号

P：力

D_P，R_P，I_P：関係式の前項から後項への関係の作用力

${}_PD$，${}_PR$，${}_PI$：関係式の後項から前項への関係の作用力

例　a Φ b の場合

R_P：a から b 方向への関係の作用力

${}_PR$：b から a 方向への関係の作用力

(2)　記号間の対応

(関係記号)	(作用素記号)	(力記号)
⌗	—	—
エ	D (n)	D_{np}
エ°	D (n)	D_{np}
°エ	${}^{\circ}D$ (n)	${}_{np}D$
エ^s	D^s (n)	D^s_{np}
エ^n	D^n (n)	D^n_{np}
エ^t	D^t (n)	D^t_{np}
反作用素の例	D $(-n)$	$-D_{np}$
Φ	R (n)	${}_{np}R_{np}$
Φ^2	R^2 (n)	${}_{np}R^2_{np}$
Φ^1	R^1 (n)	R^1_{np}
^{1}Φ	${}^1R$ (n)	${}^{1}_{np}R$
Φ$^+$	R^+ (n)	${}_{np}R^{t}_{np}$
Φ$^-$	R^- (n)	${}_{np}R^{-}_{np}$

反作用素の例	$R\ (-n)$	$-{}_{np}R_{np}$
≺	$I\ (n)$	I_{np}
≺°	$I\ (n)$	I_{np}
°≻	${}^{\circ}I\ (n)$	${}_{np}^{\circ}I$
反作用素の例	$I\ (-n)$	$-I_{np}$

ただし，

エ°，°エ は，エ°・°エ（又はエ°◦°エ）

≺°，°≻ は，≺°・°≻（又は≺°◦°≻）

のような場合の順序・逆順序，包含・逆包含を表す。

2．計算法

(1) 計算規則

計算は次の規則によって行う。

1）$m>0$，$n>0$，$i>0$とし，mとnによる計算結果が$-i$となった場合，それは反作用である。

表現：$-D_{ip}$，$-R_{ip}$，$-{}_{ip}R\equiv-({}_{ip}R)$，$-I_{ip}$など

（これを$D_{(-i)p}$，$R_{(-i)p}$のようには表現しない。）

2）$\pm D_{mp}\pm D_{np}\equiv\pm D_{(m+n)p}$（複号同順，以下同じ。）

3）$D_{mp}-D_{np}$

$m>n$の場合$\equiv D_{(m-n)p}$

$m<n$の場合$\equiv -D_{(n-m)p}$（$m=n$の場合は0，つまり消滅）

4）$\pm{}_{np}D\pm{}_{mp}D\equiv\pm{}_{(m+n)p}D$

5）${}_{mp}D-{}_{np}D$

$m>n$の場合$\equiv{}_{(m-n)p}D$

$m<n$の場合$\equiv -{}_{(n-m)p}D$（$m=n$の場合は0）

6）${}_{mp}D+D_{np}$

$m>n$の場合$\equiv{}_{(m-n)p}D$

$m<n$の場合$\equiv D_{(n-m)p}$（$m=n$の場合は0）

注　反作用素は同種類の作用を消すだけで，異類項にはかかわらない。したがって，次のような場合には計算はできない。

$-{}_{mp}D+D_{np}$

${}_{mp}D-D_{np}$

$-{}_{mp}D-D_{np}$

7）D^{s}，D^{t}，D^{m}についても1）～6）は成り立つ。

8）$\pm{}_{np}R_{np}\equiv\pm{}_{np}R\pm R_{np}$

9）R^{+}，R^{-}についても８）は成り立つ。

10）$\pm{}_{np}R^{2}_{np} \equiv \pm{}_{np}^{1}R \pm R^{1}_{np}$

11）$\pm R_{mp} \pm R_{np} \equiv R_{(\pm m \pm n)P}$，$\mp R_{mp} \pm R_{np} \equiv R_{(+m+n)P}$

12）$\pm{}_{mp}R \pm{}_{np}R \equiv {}_{(\pm m \pm n)P}R$，$\mp{}_{mp}R \pm{}_{np}R \equiv {}_{(\mp m \pm n)P}R$

13）R^{+}，R^{-}についても11)，12）は成り立ち，R^{1}については11)，${}^{1}R$については12）が成り立つ。

14）$\pm{}_{mp}R \pm R_{np} \equiv \pm{}_{np}R_{np} \pm {}_{(m-n)P}R$（$m > n$ の場合）

$\equiv \pm{}_{mp}R_{mp} \pm R_{(n-m)P}$（$m < n$ の場合）

$m = n$ は８）に同じ

注　$\pm{}_{mp}R_{mp}$ は６）の注と同じ理由で計算できない。

15）R^{+}，R^{-}，R^{2}，${}^{1}R$，$R^{\cdot}$ についても14）は成り立つ。

ただし，$\pm{}_{mp}^{1}R \pm R^{1}_{np} \equiv \pm{}_{np}R^{2}_{np} \pm {}_{(n-m)P}^{1}R$（$m > n$ の場合）

$\equiv \pm{}_{mp}R^{2}_{mp} \pm R^{1}_{(n-m)P}$（$m < n$の場合）

16）$I_{np} \equiv D_{np} + {}_{np}R_{np}$

$\equiv D_{np} + {}_{np}R + R_{np}$

17）${}_{np}^{\circ}I \equiv {}_{np}D + {}_{np}R_{np}$

$\equiv {}_{np}D + {}_{np}R + R_{np}$

18）$-I_{np} \equiv -D_{np} - {}_{np}R_{np}$

$\equiv -D_{np} - {}_{np}R - R_{np}$

19）$\pm I_{mp} \pm I_{np} \equiv I_{(\pm m + n)P}$

20）${}^{\circ}I$ についても19）は成り立つ。

21）$\pm I_{mp} \pm {}_{np}^{\circ}I \equiv \pm D_{mp} \pm {}_{np}D \pm {}_{mp}R_{mp} \pm {}_{np}R_{np}$

$\equiv \pm D_{mp} \pm {}_{np}D \pm {}_{(m-n)P}R_{(m+n)P}$

$\equiv D_{(m-n)P} + {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m > n$，$+$の場合）

$\equiv -D_{mp} - {}_{np}D - {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m > n$，$-$の場合）

６）の注を参照

$\equiv {}_{(n-m)P}D + {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m < n$，$+$の場合）

$\equiv -D_{mp} - {}_{np}D - {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m < n$，$-$の場合）

$\equiv {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m = n$，$+$の場合）

$\equiv -D_{mp} - {}_{np}D - {}_{(m+n)P}R_{(m+n)P}$（$m = n$，$-$の場合）

22）$\pm I_{mp} \mp {}_{np}^{\circ}I \equiv \pm D_{mp} \mp {}_{np}D \pm {}_{mp}R_{mp} \mp {}_{np}R_{np}$

$\equiv \pm D_{mp} \mp {}_{np}D + {}_{(\pm m \mp n)P}R_{(\pm m \mp n)P}$

その他にも計算規則に加えた方がよいものがあれば順次加える。

(2) 計算手順

1）関係→関係作用素→力の変換を行う。

2）計算規則を用いて力を分解する。

3）分解された力を計算規則によりまとめる。

4）力→関係作用素→関係の変換を行う。

注　計算はどこで終ってもよい。

(3) 計算例

1）$a \Phi b$ の関係作用素が影響しあえばどうなるか。

$$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

$$\Phi \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} D_P + {}_PR_P \\ \equiv I_P \end{array}$$

$$I_P \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} D(0) \\ R(0) \\ I(1) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \prec$$

$\therefore a \Phi b \rightarrow a \prec b$

2）$a \Phi b \sharp c \prec d \sharp e$エ$f$ の場合

$$\begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(-1) \\ R^{*}(1) \\ I\ (1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(2) \\ R(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

（i）$c \prec d$ の $\prec$ が $a \Phi b$ の Φ に影響を及ぼすとどうなるか。

$$\Phi\ (a,\ b)\ (\prec\ (c,\ d)) \Rightarrow \begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(-1) \\ R^{*}(1) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow D_P + {}_PR_P - D_P + {}_PR^{*}{}_P + I_P \\ &\equiv {}_PR_P + {}_PR^{*}{}_P + I_P \end{aligned}$$

$$ {}_{P}R_{P}+{}_{P}R^{*}{}_{P}+I_{P} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} R\ (1) \\ R^{*}(1) \\ I\ (1) \end{bmatrix} \Rightarrow \ \prec (a,\ b) $$

$\therefore a \Phi b \Rightarrow a \prec b$

（ii） e エ f の エ に $a \Phi b$ の Φ が影響を及ぼすとどうなるか。

$$ \text{エ}\ (e,\ f)\ (\Phi\ (a,\ b)) \Rightarrow \begin{bmatrix} D(2) \\ R(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(1) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow D_{2P}+D_{P}+{}_{P}R_{P} $$
$$ \equiv D_{3P}+{}_{P}R_{P} $$

$$ D_{3P}+R_{P} \Rightarrow \begin{bmatrix} D(3) \\ R(1) \\ I(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \ \Phi\ (e,\ f) $$

$\therefore e$ エ $f \Rightarrow e \Phi f$

著者
山　本　恒　夫（やまもとつねお）
1937年生れ
東京都出身
筑波大学教授　教育学博士

事象と関係の理論

2001年３月５日　発行

著　者　山本　恒夫

発行者　筑波大学教育学系生涯学習学研究室

〒305-8572 茨城県つくば市天王台１－１－１

印刷所　株式会社いなもと印刷

〒300-0007 茨城県土浦市板谷６－28－８